

温馨提示：本试卷包括第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，共 150 分。
考试时间 120 分钟。祝同学们考试顺利！

第 I 卷 选择题（共 45 分）

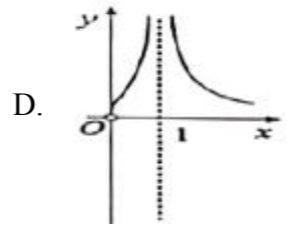
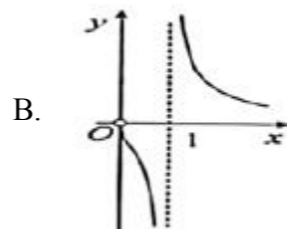
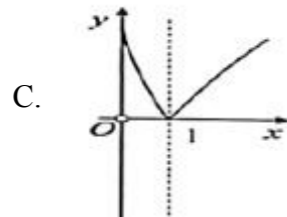
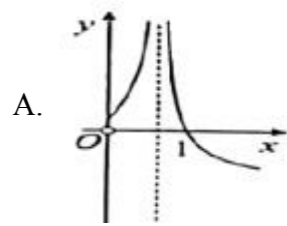
注意事项：

- 答第 I 卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、科目涂写在答题卡上。
- 每小题选出答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。答在试卷上的无效。
- 本卷共 9 小题，每小题 5 分，共 45 分。

- 如果事件 A, B 互斥，那么 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- 如果事件 A, B 相互独立，那么 $P(AB) = P(A)P(B)$
- 锥体的体积公式 $V = \frac{1}{3}Sh$ ，其中 S 表示锥体的底面积， h 表示锥体的高。
- 球体 $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ ，其中 R 为球的半径。

一、选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

- 集合 $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{x \in N | x^2 - 3x \leq 0\}$, 则 $C_U(A \cup B) = ()$
A. $\{0, 1, 2, 3\}$ B. $\{0, 4, 5\}$
C. $\{1, 2, 4\}$ D. $\{4, 5\}$
- 已知 $p: x \geq k$, $q: \frac{3}{x+1} < 1$, 如果 p 是 q 的充分不必要条件，则实数 k 的取值范围是 $()$
A. $[2, +\infty)$ B. $(2, +\infty)$ C. $[1, +\infty)$ D. $(-\infty, -1]$
- 函数 $f(x) = \frac{2}{x-1+\ln x}$ 的图像大致为 $()$



- 三棱锥的棱长均为 $4\sqrt{6}$, 顶点在同一球面上, 则该球的表面积为 $()$
A. 36π B. 72π C. 144π D. 288π
- 设正实数 a, b, c 分别满足 $a \cdot 2^a = 1$, $b \log_2 b = 1$, $c \log_3 c = 1$, 则 a, b, c 的大小关系为 $()$
A. $a > b > c$ B. $b > a > c$ C. $c > b > a$ D. $a > c > b$
- 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 F , 虚轴的上端点为 B , P 为左支上的一个动点, 若 $\triangle PBF$ 周长的最小值等于实轴长的 3 倍, 则该双曲线的离心率为 $()$
A. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{10}}{5}$ C. $\sqrt{10}$ D. $\sqrt{2}$
- 若函数 $f(x) = \cos(2x + \varphi)$ 的图象关于点 $(\frac{4\pi}{3}, 0)$ 成中心对称, 且 $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, 则函数 $y = f(x + \frac{\pi}{3})$ 为 $()$
A. 奇函数且在 $(0, \frac{\pi}{4})$ 上单调递增 B. 偶函数且在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增
C. 偶函数且在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递减 D. 奇函数且在 $(0, \frac{\pi}{4})$ 上单调递减
- 已知直线 $l: x - y = 1$ 与圆: $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 1 = 0$ 相交于 A, C 两点, 点 B, D 分别在圆上运动, 且位于直线 l 的两侧, 则四边形 $ABCD$ 面积的最大值为 $()$
A. $\sqrt{30}$ B. $2\sqrt{30}$ C. $\sqrt{51}$ D. $2\sqrt{51}$
- 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x, & x > 0 \\ a|x + \frac{1}{2}| - \frac{15}{4}, & x \leq 0 \end{cases}$, 函数 $g(x) = x^3$, 若方程 $g(x) = xf(x)$ 有 4 个不同实根, 则实数 a 的取值范围为 $()$
A. $(3, \frac{15}{2}]$ B. $(5, \frac{15}{2}]$ C. $(-3, 5)$ D. $(3, 5)$

第 II 卷 非选择题 (共 105 分)

注意事项:

1. 用黑色水笔或签字笔直接答在答题卡上, 答在本试卷上的无效。
2. 本卷共 11 小题, 共 105 分。

二、填空题: 本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分. 把答案填在答题卷上.

10. 若复数 $2 + i = (1 + i)(a + bi)$ ($a, b \in R$), 其中 i 是虚数单位, 则 $b =$ _____.

11. 如图所示的茎叶图记录了甲、乙两组各 5 名工人某日的产量数据(单位: 件). 若这两组数据的中位数相等, 且平均值也相等, 则 $x + y$ 的值为 _____.

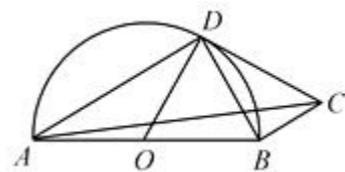
甲组		乙组	
6	5	9	
2	5	6	1 7 y
x	4	7	8

12. 若 $(\frac{3}{\sqrt{x}} - \sqrt{x})^n$ 的展开式中所有项系数的绝对值之和为 1024, 则该展开式中的常数项是 _____.

13. 已知一个袋子中装有 4 个红球和 2 个白球, 假设每一个球被摸到的可能性是相等的, 若从袋子中摸出 3 个球, 记摸到的白球的个数为 ξ , 则 $\xi = 1$ 的概率是 _____; 随机变量 ξ 期望是 _____.

14. 已知正数 x, y 满足 $x^2y + 4xy^2 + 6xy = x + 4y$, 则当 $\frac{x}{y} =$ _____ 时, $\frac{xy}{x+4y}$ 的最大值为 _____.

15. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, 已知 $AB = 2$, CD 与以 AB 为直径的半圆 O 相切于点 D , 且 $BC \parallel AD$, 若 $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = -1$, 则 $BD =$ _____; 此时 $\vec{AD} \cdot \vec{OD} =$ _____.



三、解答题: 本大题共 5 小题, 共 75 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

16. (本小题满分 14 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $2a - c = 2bcos C$.

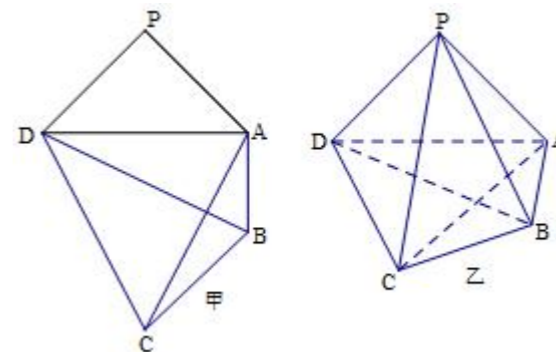
(I) 求 $\sin(\frac{A+C}{2} + B)$ 的值;

(II) 若 $b = \sqrt{3}$, 求 $c - a$ 的取值范围.

17. (本小题满分 14 分)

如图甲的平面五边形 $PABCD$ 中, $PD = PA, AC = CD = BD = \sqrt{5}, AB = 1, AD = 2, PD \perp PA$, 现将图甲中的 $\triangle PAD$ 沿 AD 边折起, 使平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ 得图乙的四棱锥 $P - ABCD$. 在图乙中

- (I) 求证: $PD \perp$ 平面 PAB ;
- (II) 求二面角 $A - PB - C$ 的大小;
- (III) 在棱 PA 上是否存在点 M 使得 BM 与平面 PCB 所成的角的正弦值为 $\frac{1}{3}$? 并说明理由.



18. (本小题满分 15 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}$, 且 $[3 + (-1)^n]a_{n+2} - 2a_n + 2[(-1)^n - 1] = 0, n \in N^*$.

- (I) 求 a_3, a_4, a_5, a_6 的值及数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (II) 设 $b_n = a_{2n-1} \cdot a_{2n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

19. (本小题满分 16 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 椭圆上的点到左焦点 F_1 的距离的最大值为 $\sqrt{2} + 1$.

- (I) 求椭圆 C 的标准方程;
- (II) 已知直线 $l: y = kx + t (k \neq 0)$ 与椭圆 C 交于 M, N 两点, 在 y 轴上是否存在点 $P(0, m)$, 使得 $|MP| = |NP|$ 且 $|MN| = 2$. 若存在, 求出实数 m 的取值范围; 若不存在, 说明理由.

20. (本小题满分 16 分)

已知函数 $f(x) = \ln x - ax + 1, g(x) = x(e^x - x)$.

- (I) 若直线 $y = 2x$ 与函数 $f(x)$ 的图象相切, 求实数 a 的值;
- (II) 若存在 $x_1 \in (0, +\infty), x_2 \in (-\infty, +\infty)$, 使 $f(x_1) = g(x_2) = 0$, 且 $x_1 - x_2 > 1$, 求实数 a 的取值范围;
- (III) 当 $a = -1$ 时, 求证: $f(x) \leq g(x) + x^2$.

数学学科参考答案

一、选择题：(45 分) .

1. D 2. B 3. B 4. C 5. C 6. A 7. D 8. A 9. B

二、填空题：(30 分)

10. $-\frac{1}{2}$ 11. 8 12. -90

13. $\frac{3}{5}$; 1 14. 4; $\frac{1}{8}$ 15. 1; $\frac{3}{2}$

三、解答题：

16. (本小题满分 14 分)

解：(I) 因为 $2a - c = 2b \cos C$, 所以 $2 \sin A - \sin C = 2 \sin B \cos C$,

所以 $2 \sin(B + C) - \sin C = 2 \sin B \cos C$, 整理得 $\sin C = 2 \cos B \sin C$3 分

因为 $\sin C \neq 0$, 所以 $\cos B = \frac{1}{2}$,

所以 $B = \frac{\pi}{3}$, 从而 $\frac{A+C}{2} + B = \frac{2\pi}{3}$,5 分

故 $\sin(\frac{A+C}{2} + B) = \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$6 分

(II) 由 (I) 得 $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$,7 分

所以 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} = 2$, 从而 $a = 2 \sin A$, $c = 2 \sin C$9 分

所以 $c - a = 2 \sin C - 2 \sin A = 2 \sin(\frac{2\pi}{3} - A) - 2 \sin A$

$= \sqrt{3} \cos A - \sin A = 2 \sin(\frac{\pi}{3} - A)$11 分

因为 $A + C = \frac{2\pi}{3}$, 所以 $0 < A < \frac{2\pi}{3}$, 从而 $-\frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{3} - A < \frac{\pi}{3}$,12 分

所以 $-\sqrt{3} < 2 \sin(\frac{\pi}{3} - A) < \sqrt{3}$,

故 $c - a$ 的取值范围为 $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$14 分

17. (本小题满分 14 分)

(I) 证明: $\because AB = 1, AD = 2, BD = \sqrt{5}$

$\therefore AB^2 + AD^2 = BD^2, \therefore AB \perp AD$,

\therefore 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$,

$\therefore AB \perp$ 平面 PAD , 又 $\because PD \subset$ 平面 PAD ,

$\therefore AB \perp PD$, 又 $\because PD \perp PA, PA \cap AB = A$

$\therefore PD \perp$ 平面 PAB4 分

(II) 解: 取 AD 的中点 O , 连结 OP, OC ,

由平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ 知 $PO \perp$ 平面 $ABCD$,

由 $AC = CD$ 知 $OC \perp OA$,

以 O 为坐标原点, OC 所在的直线为 x 轴, OA 所在的直线为 y 轴建立空间直角坐标系如图示,

则易得 $C(2, 0, 0), P(0, 0, 1), D(0, -1, 0), A(0, 1, 0), B(1, 1, 0)$

$\therefore \overrightarrow{PB} = (1, 1, -1), \overrightarrow{PC} = (2, 0, -1), \overrightarrow{PD} = (0, -1, -1)$,

设平面 PBC 的法向量为 $\vec{m} = (a, b, c)$,

由 $\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{PB} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{PC} = 0 \end{cases}$, 得 $\begin{cases} a + b - c = 0 \\ 2a - c = 0 \end{cases}$, 令 $a = 1$ 得 $b = 1, c = 2, \therefore \vec{m} = (1, 1, 2)$

设二面角 $A - PB - C$ 大小为 θ ,

则 $\cos \theta = \frac{\vec{m} \cdot \overrightarrow{DP}}{|\vec{m}| |\overrightarrow{DP}|} = \frac{-1-2}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\because 0 \leq \theta \leq \pi, \therefore$ 二面角 $A - PB - C$ 的大小 $\theta = \frac{2\pi}{3}$9 分

(III) 解: 假设点 M 存在, 其坐标为 (x, y, z) , BM 与平面 PBC 所成的角为 α ,

则存在 $\lambda \in [0, 1]$, 有 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AP}$,

即 $(x, y - 1, z) = \lambda(0, -1, 1), M(0, 1 - \lambda, \lambda)$,

则 $\overrightarrow{BM} = (-1, -\lambda, \lambda)$, 从而 $\sin \alpha = \frac{|\vec{m} \cdot \overrightarrow{BM}|}{|\vec{m}| |\overrightarrow{BM}|} = \frac{|-1 + \lambda|}{\sqrt{6} \sqrt{1^2 + \lambda^2 + \lambda^2}} = \frac{1}{3}$

化简得 $\lambda^2 + 6\lambda - 1 = 0$, 解得 $\lambda = \pm \sqrt{10} - 3$

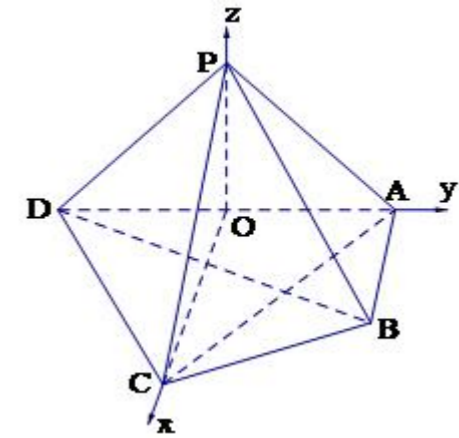
$\because \lambda \in [0, 1], \therefore \lambda = \sqrt{10} - 3$

\therefore 在棱 PA 上满足题意的点 M 存在.14 分

18. (本小题满分 15 分)

解: (I) $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}$, 且 $[3 + (-1)^n]a_{n+2} - 2a_n + 2[(-1)^n - 1] = 0$,

则 $2a_3 - 2a_1 - 4 = 0$, 解得 $a_3 = 3$,2 分



$4a_4 - 2a_2 = 0$, 解得 $a_4 = \frac{1}{4}$,

$2a_5 - 2a_3 - 4 = 0$, 解得 $a_5 = 5$,

$4a_6 - 2a_4 = 0$, 解得 $a_6 = \frac{1}{8}$,5分

当 n 为奇数时, $a_{n+2} = a_n + 2$, $a_n = n$;

当 n 为偶数时, $a_{n+2} = \frac{1}{2}a_n$, $a_n = (\frac{1}{2})^{\frac{n}{2}}$.

即有 $a_n = \begin{cases} n, n \text{ 为奇数} \\ (\frac{1}{2})^{\frac{n}{2}}, n \text{ 为偶数} \end{cases}$;7分

(II) 由于 $2n-1$ 为奇数, 则 $a_{2n-1} = 2n-1$,

由于 $2n$ 为偶数, 则 $a_{2n} = (\frac{1}{2})^n$.

因此, $b_n = a_{2n-1} \cdot a_{2n} = (2n-1) \cdot (\frac{1}{2})^n$10分

$S_n = 1 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot (\frac{1}{2})^2 + 5 \cdot (\frac{1}{2})^3 + \dots + (2n-3) \cdot (\frac{1}{2})^{n-1} + (2n-1) \cdot (\frac{1}{2})^n$,

$\frac{1}{2}S_n = 1 \cdot (\frac{1}{2})^2 + 3 \cdot (\frac{1}{2})^3 + 5 \cdot (\frac{1}{2})^4 + \dots + (2n-3) \cdot (\frac{1}{2})^n + (2n-1) \cdot (\frac{1}{2})^{n+1}$,

两式相减得 $\frac{1}{2}S_n = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2[(\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^3 + (\frac{1}{2})^4 + \dots + (\frac{1}{2})^n] - (2n-1) \cdot (\frac{1}{2})^{n+1}$,

$= \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{\frac{1}{4}(1-\frac{1}{2^{n-1}})}{1-\frac{1}{2}} - (2n-1) \cdot (\frac{1}{2})^{n+1}$,13分

化简可得, $S_n = 3 - \frac{2n+3}{2^n}$15分

19. (本小题满分 16 分)

解: (I) 设椭圆 C 的焦距为 $2c(c > 0)$, 则 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

椭圆上的点到左焦点的距离的最大值为 $a+c = \sqrt{2}+1$,2分

所以, $\begin{cases} a = \sqrt{2} \\ c = 1 \end{cases}$, 则 $b = \sqrt{a^2 - c^2} = 1$,

因此, 椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$;5分

(II) 设点 $M(x_1, y_1)$ 、 $N(x_2, y_2)$,

将直线 l 的方程与椭圆 C 的方程联立 $\begin{cases} y = kx + t \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases}$,

消去 y 并整理得 $(2k^2 + 1)x^2 + 4ktx + 2t^2 - 2 = 0$.

$\Delta = 16k^2t^2 - 4(2k^2 + 1)(2t^2 - 2) = 8(2k^2 + 1 - t^2) > 0$, 得 $t^2 < 2k^2 + 1$,

由韦达定理得 $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{4kt}{2k^2+1} \\ x_1x_2 = \frac{2t^2-2}{2k^2+1} \end{cases}$,8分

设线段 MN 的中点为 Q ,

则 $\frac{x_1+x_2}{2} = -\frac{2kt}{2k^2+1}$, $\frac{y_1+y_2}{2} = k \cdot \frac{x_1+x_2}{2} + t = \frac{t}{2k^2+1}$,

所以, 点 Q 的坐标为 $(-\frac{2kt}{2k^2+1}, \frac{t}{2k^2+1})$10分

由于 $|MP| = |NP|$, 则 $PQ \perp MN$,

直线 PQ 的斜率为 $k_{PQ} = \frac{m - \frac{t}{2k^2+1}}{\frac{2kt}{2k^2+1}} = -\frac{1}{k}$, 得 $m = -\frac{t}{2k^2+1}$. ①12分

$|MN| = \sqrt{1+k^2} \cdot |x_1 - x_2|$
 $= \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2}$
 $= \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{(-\frac{4kt}{2k^2+1})^2 - 4 \times \frac{2t^2-2}{2k^2+1}} = \frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{(1+k^2)(2k^2+1-t^2)}}{2k^2+1} = 2$,

得 $t^2 = \frac{2k^2+1}{2(k^2+1)}$, 由 ① 式得 $m^2 = \frac{t^2}{(2k^2+1)^2} = \frac{1}{(2k^2+2)(2k^2+1)} \in (0, \frac{1}{2})$15分

因此, 实数 m 的取值范围为 $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0) \cup (0, \frac{\sqrt{2}}{2})$16分

20. (本小题满分 16 分)

解: (I) 设切点为 $(x_0, f(x_0))$, 由 $f'(x) = \frac{1}{x} - a$.

$\therefore f'(x_0) = \frac{1}{x_0} - a$.

\therefore 切线方程为: $y - (\ln x_0 - ax_0 + 1) = (\frac{1}{x_0} - a)(x - x_0)$,

即 $y = (\frac{1}{x_0} - a)x + \ln x_0$2分

\therefore 直线 $y = 2x$ 与函数 $f(x)$ 的图象相切, $\therefore \frac{1}{x_0} - a = 2$, $\ln x_0 = 0$.

解得 $x_0 = 1$, $a = -1$4分

(II) 设 $u(x) = e^x - x$, $x \in R$. $u'(x) = e^x - 1$, 可得 0 是函数 $u(x)$ 的极小值点, 可得 $u(x) \geq u(0) = 1 > 0$.

由 $g(x_2) = x_2(e^{x_2} - x_2) = 0$, 解得 $x_2 = 0$. 由 $x_1 - x_2 > 1$,

即 $x_1 > 1$5分

由题意可得: 函数 $f(x) = \ln x - ax + 1$ 在 $x \in (1, +\infty)$ 上有零点.

由 $f'(x) = \frac{1}{x} - a = \frac{1-ax}{x}$.

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $x \in (1, +\infty)$ 上单调递增, $f(x) > f(1) = 1 - a > 0$, 此时函数 $f(x)$ 无零点, 舍去.

当 $a > 0$ 时, $f'(x) = \frac{-a(x-\frac{1}{a})}{x}$,7分

当 $a \geq 1$ 时, $0 < \frac{1}{a} \leq 1$, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 在 $x \in (1, +\infty)$ 上单调递减, $f(x) < f(1) = 1 - a \leq 0$, 此时函数 $f(x)$ 无零点, 舍去. 当 $\frac{1}{a} > 1$, 即 $0 < a < 1$ 时, 由 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \frac{1}{a}$,

可得函数 $f(x)$ 在 $x \in (1, \frac{1}{a})$ 上单调递增, 在 $x \in (\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递减,

$\therefore x = \frac{1}{a}$ 时, 函数 $f(x)$ 取得极大值即最大值, $f\left(\frac{1}{a}\right) = \ln\frac{1}{a} > 0, f(1) = 1 - a > 0,$

\therefore 函数 $f(x)$ 在 $x \in (1, \frac{1}{a})$ 上无零点. ……………9分

由 $f\left(\frac{4}{a^2}\right) = \ln\frac{4}{a^2} - a \cdot \frac{4}{a^2} + 1 = \ln 4 - 2\ln a - \frac{4}{a} + 1.$

令 $h(a) = \ln 4 - 2\ln a - \frac{4}{a} + 1,$ 则 $h'(a) = -\frac{2}{a} + \frac{4}{a^2} = \frac{2(2-a)}{a^2} > 0,$

\therefore 函数 $h(a)$ 在 $x \in (0, 1)$ 上单调递增,

$\therefore h(a) < h(1) = -3 < 0, \therefore f\left(\frac{4}{a^2}\right) < 0.$

\therefore 函数 $f(x)$ 在 $x \in (\frac{1}{a}, +\infty)$ 上连续不断, 存在唯一的零点.

$\therefore f(x)$ 在 $x \in (\frac{1}{a}, +\infty)$ 上有零点.

综上所述: $a \in (0, 1).$ ……………11分

(III) 证明: 当 $a = -1$ 时, $f(x) = \ln x + x + 1,$

令 $F(x) = x^2 + g(x) - f(x) = xe^x - \ln x - x - 1,$

$F'(x) = (x+1)e^x - \frac{1}{x} - 1 = \frac{x+1}{x}(xe^x - 1).$ ……………12分

令 $G(x) = xe^x - 1, x > 0,$ 则 $G'(x) = (x+1)e^x > 0.$

\therefore 函数 $G(x)$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上单调递增.

$\therefore G(0) = -1, G(1) = e - 1 > 0.$

\therefore 函数 $G(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上存在一个零点, 即函数 $G(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上存在唯一零点 $x_0 \in (0, 1).$

\therefore 当 $x \in (0, x_0)$ 时, $G(x) < 0,$ 即 $F'(x) < 0,$ 此时函数 $F(x)$ 单调递减;

当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $G(x) > 0,$ 即 $F'(x) > 0,$ 此时函数 $F(x)$ 单调递增. ……………14分

$\therefore F(x)_{\min} = F(x_0) = x_0 e^{x_0} - \ln x_0 - x_0 - 1,$

由 $G(x_0) = 0$ 可得: $x_0 e^{x_0} = 1.$

两边取对数可得: $\ln x_0 + x_0 = 0.$

故 $F(x_0) = 1 - (\ln x_0 + x_0) - 1 = 0,$

$\therefore x^2 + g(x) - f(x) \geq 0,$ 即 $f(x) \leq g(x) + x^2.$ ……………16分